Beiträge über den Zusammenhang der analytischen Funktionen mit der Theorie der reellen Minimalflächen.

INAUGURAL-DISSERTATION

DER

PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT II

DER

UNIVERSITÄT BERN

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

VORGELEGT VON

ROLAND KISSLING

Kappel (Soloth.)

ZÜRICH :: 1932.
Diss.-Druckerei A.-G. Gebr. Leemann & Co.
Stockerstr. 64.

Beiträge über den Zusammenhang der analytischen Funktionen mit der Theorie der reellen Minimalflächen.

INAUGURAL-DISSERTATION

DER

PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT II

DER

UNIVERSITÄT BERN

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

VORGELEGT VON

ROLAND KISSLING

Kappel (Soloth.)

ZÜRICH :: 1932.
Diss.-Druckerei A.-G. Gebr. Leemann & Co.
Stockerstr. 64.

Von der philosophischen Fakultät II auf Antrag des Herrn Prof. Dr. Crelier angenommen.

Bern, den 20. April 1932.

Der Dekan:
Prof. Dr. **P. Gruner.**

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Ich möchte an dieser Stelle meinen verehrten Lehrern, Herrn Prof. Dr. L. Crelier, Herrn Prof. Dr. W. Scherrer, Herrn Prof. Dr. P. Gruner und Herrn Prof. Dr. Ch. Moser, für das mir während meines Studiums entgegengebrachte Wohlwollen, meinen innigsten Dank aussprechen.

Besonders dankbar fühle ich mich gegenüber Herrn Prof. Dr. L. Crelier und Herrn P. D. Dr. W. Michel, durch deren Anregung und Unterstützung die vorliegende Arbeit entstanden ist.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544718_0072

Einleitung.

Es gehört wohl zum Reizvollsten in der Mathematik, den Zusammenhängen scheinbar getrennt bestehender Gebiete und Theorien nachzuspüren. Meist wächst dadurch das Verständnis des schon Bestehenden; oft öffnen sich neue Wege.

Wie befruchtend beispielsweise auf die Theorie der analytischen Funktionen gewisse geometrische Anschauungen und Tatsachen gewirkt haben, ist allbekannt.

Daß zwischen den analytischen Funktionen und der Theorie der reellen Minimalflächen ein enger Zusammenhang besteht, hat Weierstraß in den von ihm, im Jahre 1866, in den Berliner Akademieberichten veröffentlichten Untersuchungen gezeigt. Die Frucht dieser Arbeit ist der Satz:

Zu jeder analytischen Funktion gehört eine reelle Minimalfläche und umgekehrt.

Diesen grundlegenden Satz hat Weierstraß noch dahin verschärft, daß zu jeder algebraischen Funktion eine algebraische Minimalfläche gehört und umgekehrt.

Obschon nun die Theorie der reellen Minimalflächen nach allen Richtungen auf's gründlichste untersucht wurde, ist doch meines Wissens dem Zusammenhang dieser Flächen mit der analytischen Funktion, abgesehen von obigem Satze, nie näher nachgeforscht worden.

In der nachfolgenden Arbeit sei auf diese wechselseitigen Beziehungen etwas näher eingegangen und zugleich gezeigt, wie man aus der alleinigen Tatsache des Satzes von Weierstraß als Grundlage, die geometrischen Eigenschaften der reellen Minimalflächen leicht herleiten kann.

Als Ausgangspunkt wählen wir die Aufgabe, durch eine gegebene, geschlossene Raumkurve eine Fläche von kleinstem Flächeninhalt zu legen.

§ 1.

Setzen wir diese Fläche als in Parameterdarstellung gegeben an, so ist das folgende Variationsproblem zu lösen.

Bezeichnen wir, wie üblich mit E, F, G die Koeffizienten der ersten Grundform der Flächentheorie, sowie mit D den Ausdruck $\sqrt{EG - F^2}$, so sind die Bedingungen für einen Extremalwert des Integrals:

$$J = \iint \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

zu bestimmen.

Dazu ist notwendig, das Bestehen der nach Lagrange benannten Differentialgleichung, die für Flächen in Parameterdarstellung in die folgenden drei zerfällt:

$$D_\xi - \frac{\partial}{\partial u} D_{\xi_u} - \frac{\partial}{\partial v} D_{\xi_v} = 0$$

$$D_\eta - \frac{\partial}{\partial u} D_{\eta_u} - \frac{\partial}{\partial v} D_{\eta_v} = 0$$

$$D_\zeta - \frac{\partial}{\partial u} D_{\zeta_u} - \frac{\partial}{\partial v} D_{\zeta_v} = 0$$

wobei ξ, η, ζ die Koordinaten der Fläche, in einem rechtwinkligen System und u, v Parameter bedeuten.

Setzen wir für D den oben angeführten Wert ein, so erhält man für die ξ-Komponente:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{G_{\xi_u} - F_{\xi_v}}{D}\right\} + \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{E_{\xi_v} - F_{\xi_u}}{D}\right\} = 0$$

und zwei weitere Gleichungen, die durch entsprechende Vertauschung von ξ, η, ζ hieraus hervorgehen.

Wählen wir nun für die noch willkürlichen Parameter u, v solche, die die Fläche mit einem isothermen Netz überziehen, so lauten die Bedingungen dafür:

$$E = G \quad \text{und} \quad F = 0$$

Damit werden die drei folgenden Differentialgleichungen gefunden:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} = 0$$

deren allgemeinste Lösungen bekanntlich gegeben sind durch:

$$\xi = \Re\, l(w), \quad \eta = \Re\, m(w), \quad \zeta = \Re\, n(w)$$

wo l, m, n drei willkürliche analytische Funktionen der komplexen Veränderlichen $w = u + i\,v$ bedeuten.

Setzt man

$$l(w) = \xi + i\,\xi', \quad m(w) = \eta + i\,\eta', \quad n(w) = \zeta + i\,\zeta'$$

und berechnet die Ableitungen von l, m, n nach w unter Berücksichtigung der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen, so gehen die beiden reellen Bedingungsgleichungen für isotherme Parameter, $E = G$ und $F = 0$ in die eine komplexe Beziehung über:

I) $$\underline{l'^2(w) + m'^2(w) + n'^2(w) = 0}$$

Von dieser Gleichung I) aus kommt man zu den Weierstraß'schen Formeln für die Minimalfläche, wie folgt (Vergl. Weierstraß, Berliner Akademieberichte 1866, pag. 612);

Setzt man, unter A und B zwei willkürliche Funktionen von w verstehend:

$$l'(w) = A^2 - B^2, \quad m'(w) = i(A^2 + B^2), \quad n'(w) = 2\,A\,B$$

so wird durch Einführung einer neuen komplexen Veränderlichen s, sowie einer Funktion $\mathfrak{F}(s)$ durch die Formeln:

$$s = \frac{B(w)}{A(w)} \quad \text{und} \quad \mathfrak{F}(s) = A^2(w)\,\frac{dw}{ds}$$

als Koordinaten der gesuchten Minimalfläche das folgende System zu gelten haben:

1)
$$\xi = \Re \int (1 - s^2)\,\mathfrak{F}(s)\,ds$$
$$\eta = \Re \int i(1 + s^2)\,\mathfrak{F}(s)\,ds$$
$$\zeta = \Re \int 2\,s\,\mathfrak{F}(s)\,ds$$

wobei $s = x + iy$ und $\mathfrak{F}(s)$ eine analytische Funktion von s bedeutet. Um ξ, η, ζ ohne Verwendung von Integralzeichen darzustellen, bezeichnet Weierstraß mit $F(s)$ eine Funktion, deren dritte Abteilung $\mathfrak{F}(s)$ ist. Durch partielle Integration kommt man so zu den folgenden Ausdrücken.

$$2) \qquad \begin{aligned} \xi &= \Re\{(1-s^2)\,F'' + 2s\,F' - 2\,F\} \\ \eta &= \Re\{i(1+s^2)\,F'' - 2is\,F' + 2i\,F\} \\ \zeta &= \Re\{2s\,F'' - 2\,F'\} \end{aligned}$$

Dies sind die Formeln, die Weierstraß in seiner oben angegebenen Arbeit hergeleitet hat und aus denen er auf den in der Einleitung angeführten Satz schloß.

Hier anknüpfend hat Sophus Lie in den Mathem. Annalen, Bd. 14, den geometrischen Inhalt der durch 1) und 2) gegebenen Flächen klarlegt.

Es ist sofort klar, daß die Ausdrücke 1) ohne den Buchstaben $\Re$ vor dem Integralzeichen, als Funktion von s eine Minimalkurve darstellen, denn es ist stets erfüllt:

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = 0$$

Sei nun $s_1 = x - iy$ und $\mathfrak{F}_1(s_1)$ die zu $\mathfrak{F}(s)$ konjugiert-komplexe Funktion, so lassen sich die Formeln 1) für eine reelle Minimalfläche in die Gestalt bringen:

$$3) \qquad \begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2}\int(1-s^2)\,\mathfrak{F}(s)\,ds + \frac{1}{2}\int(1-s_1^2)\,\mathfrak{F}_1(s_1)\,ds_1 \\ \eta &= \frac{i}{2}\int(1+s^2)\,\mathfrak{F}(s)\,ds - \frac{i}{2}\int(1+s_1^2)\,\mathfrak{F}_1(s_1)\,ds_1 \\ \zeta &= \int s\,\mathfrak{F}(s)\,ds + \int s_1\,\mathfrak{F}_1(s_1)\,ds_1 \end{aligned}$$

woraus zu ersehen ist, daß die reelle Minimalfläche 1) der besondere Fall einer Schiebefläche ist, der entsteht, wenn man eine isotrope Kurve an ihrer konjugiert-imaginären entlang verschiebt.

Um uns an den Zusammenhang mit der Gleichung I) zu erinnern schreiben wir die Ausdrücke 3) in der Form:

$$\xi = \tfrac{1}{2}\{l + l_1\}, \quad \eta = \tfrac{1}{2}\{m + m_1\}, \quad \zeta = \tfrac{1}{2}\{n + n_1\}$$

wobei den Größen l_1, m_1, n_1 die oben schon oft besprochene Eigenschaft zukommt.

Uns liegt es nun daran, ausgehend vom Satze von Weierstraß, den Zusammenhang der analytischen Funktion mit der Minimalfläche etwas näher zu verfolgen. Vom flächentheoretischen Standpunkt aus wird es sich also vorerst darum handeln, zu untersuchen, wie die Koeffizienten der ersten und zweiten Grundform, für die durch die Weierstraß'schen Formeln speziell gegebene Parameterdarstellung, mit der zur Minimalfläche gehörenden Funktion $\mathfrak{F}(s)$ zusammen hangen.

Dann interessiert uns etwa die Frage, wie drücken sich die Ableitungsformeln von Weingarten durch die analytische Funktion aus und was bedeuten die Fundamentalgleichungen von Mainardi und Codazzi für diese?

Daneben liegt es auf der Hand, wichtige, kennzeichnende Eigenschaften dieser Flächenfamilie zu prüfen, anhand des hier besprochenen Zusammenhanges mit den analytischen Funktionen, also immer von der Tatsache Gebrauch machend, daß unser Ausgangspunkt nur das am Anfang dieses Paragraphen auftretende Variationsproblem und die damit zusammenhängende Aussage von Weierstraß ist. Formal gehen wir eigentlich nur von der Gleichung I) aus, was im nächsten Abschnitt gezeigt werden soll.

§ 2.

Wir knüpfen also, nach dem oben Erwähnten, an die Gleichung $l'^2 + m'^2 + n'^2 = 0$ an und erinnern uns, daß eine neu eingeführte Variable durch die Beziehung:

$$s = \frac{B(w)}{A(w)} = C(w)$$

gegeben wurde. Danach ist $\frac{ds}{dw} = C'$ eine analytische Funktion, die nicht identisch verschwinden kann und des ferneren nur in isolierten Punkten Nullstellen aufweist. Setzt man nun:

$$l' = f' \frac{ds}{dw}, \quad m' = g' \frac{ds}{dw}, \quad n' = h' \frac{ds}{dw}$$

so geht I) über in:

Ia) $$\underline{f'^2 + g'^2 + h'^2 = 0}$$

und für die Koordinaten unserer Minimalfläche erhalten wir:

$$\begin{aligned} \xi &= \Re\, l = \Re \int l'\, dw = \Re \int f'\, ds \\ 4) \qquad \eta &= \Re\, m = \Re \int m'\, dw = \Re \int g'\, ds \\ \zeta &= \Re\, n = \Re \int n'\, dw = \Re \int h'\, ds \end{aligned}$$

wobei nun f', g', h' Funktionen von s bedeuten. Bezeichnen wir wiederum mit f_1', g_1', h_1' die zu f', g', h' konjugiert-komplexen Funktionen der Variablen $s_1 = x - i\,y$, so gilt ebenfalls die Beziehung: $f_1'^2 + g_1'^2 + h_1'^2 = 0$.

Vergleichen wir die Formeln 4) mit denjenigen der Ziffer 1) bezw. 3), so ergeben sich Beziehungen der folgenden Art:

$$\begin{array}{lll} f' = (1 - s^2)\,\mathfrak{F}(s) & \text{und} & f_1' = (1 - s_1^2)\,\mathfrak{F}_1(s_1) \\ 5) \qquad g' = i\,(1 + s^2)\,\mathfrak{F}(s) & & g_1' = i\,(1 + s_1^2)\,\mathfrak{F}_1(s_1) \\ h' = 2\,s\,\mathfrak{F}(s) & & h_1' = 2\,s_1\,\mathfrak{F}_1(s_1) \end{array}$$

Dies sind die allgemeinsten Lösungen unserer Differentialgleichung I[a]). Diese ist für unsere weiteren Untersuchungen die Grundlage und wir schreiben sie in der Form:

$$(u_1 + i\,v_1)^2 + (u_2 + i\,v_2)^2 + (u_3 + i\,v_3)^2 = 0$$

oder ausmultipliziert:

$$u_1^2 - v_1^2 + 2\,i\,u_1\,v_1 + u_2^2 - v_2^2 + 2\,i\,u_2\,v_2 + u_3^2 - v_3^2 + 2\,i\,u_3\,v_3 = 0$$

Dies aber bedeutet, daß folgendes gilt:

6) $$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2; \quad u_1\,v_1 + u_2\,v_2 + u_3\,v_3 = 0$$

Deutet man die u_i und v_i $(i = 1, 2, 3)$ als die Komponenten zweier räumlichen Vektoren und setzt:

$$\mathfrak{u} = u_1\,\mathfrak{i} + u_2\,\mathfrak{j} + u_3\,\mathfrak{k}; \quad \mathfrak{v} = v_1\,\mathfrak{i} + v_2\,\mathfrak{j} + v_3\,\mathfrak{k}$$

wobei $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ die Einkeitsvektoren eines rechtwinkligen Dreibeins bedeuten, so ergibt dies:

7) $$|\mathfrak{u}| = |\mathfrak{v}|; \quad \mathfrak{u} \cdot \mathfrak{v} = 0$$

wobei unter $\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{v}$ das skalare Produkt verstanden ist.

Die Gleichungen 7) sagen uns zunächst noch wenig aus, wenn es uns nicht gelingt, die beiden Vektoren näher zu bestimmen, d. h. ihre Komponenten zu berechnen. Um dies erreichen zu können, ist die Trennung von Reellem und Imaginären in den Ausdrücken 4) erforderlich. Wir schreiben also:

8)
$$\begin{aligned} f' &= u_1 + i v_1 = (1 - s^2)\,\mathfrak{F}(s) = \{1 - x^2 + y^2 - 2ixy\}(u + iv) \\ g' &= u_2 + i v_2 = i(1 + s^2)\,\mathfrak{F}(s) = \{1 + x^2 - y^2 + 2ixy\}(u + iv)\,i \\ h' &= u_3 + i v_3 = \quad 2s\,\mathfrak{F}(s) = \quad 2\{x + iy\}(u + iv) \end{aligned}$$

Hier bedeuten u und v nicht etwa die in § 1 gebrauchten Zeichen für die Parameterwerte, sondern sind der reelle und imaginäre Teil der analytischen Funktion $\mathfrak{F}(s)$. Parameterwerte der Flächendarstellung sind jetzt x und y.

Es gilt weiter:

9)
$$\begin{aligned} f &= \int (u_1 + i v_1)(dx + i\,dy) = \int u_1\,dx - v_1\,dy + i \int v_1\,dx + u_1\,dy \\ g &= \int (u_2 + i v_2)(dx + i\,dy) = \int u_2\,dx - v_2\,dy + i \int v_2\,dx + u_2\,dy \\ h &= \int (u_3 + i v_3)(dx + i\,dy) = \int u_3\,dx - v_3\,dy + i \int v_3\,dx + u_3\,dy \end{aligned}$$

Nach der Definition des Integrals einer komplexen Funktion sind die Integranden der Integrale rechts in obigen Formeln vollständige Differentiale.

Für die Koordinaten unserer zu $\mathfrak{F}(s)$ gehörigen Minimalfläche ergeben sich nun die Ausdrücke:

10)
$$\begin{aligned} \xi &= \Re \int f'\,ds = \int u_1\,dx - v_1\,dy \\ \eta &= \Re \int g'\,ds = \int u_2\,dx - v_2\,dy \\ \zeta &= \Re \int h'\,ds = \int u_3\,dx - v_3\,dy \end{aligned}$$

Wenn wir 8) in 9) einsetzen, Reelles und Imaginäres trennen und Abkürzungen a_i und b_i $(i = 1, 2, 3)$ einführen, auf deren geometrische Bedeutung wir nachher zu sprechen kommen, so folgt:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= (1 - x^2 + y^2)\,u + 2xy\,v &&= a_1 u - b_1 v \\
v_1 &= -2xy\,u + (1 - x^2 + y^2)\,v &&= b_1 u + a_1 v \\
u_2 &= -2xy\,u - (1 + x^2 - y^2)\,v &&= a_2 u - b_2 v \\
v_2 &= (1 + x^2 - y^2)\,u - 2xy\,v &&= b_2 u + a_2 v \\
u_3 &= 2x\,u - 2y\,v &&= a_3 u - b_3 v \\
v_3 &= 2y\,u + 2x\,v &&= b_3 u + a_3 v
\end{aligned}
\tag{11}
$$

In 10) diese Ausdrücke rechts berücksichtigt, führt uns auf die folgende Darstellungsart, der zu $\mathfrak{F}(s)$ gehörenden Minimalfläche:

$$
\begin{aligned}
\xi &= \int \{a_1 u - b_1 v\}\,dx - \{b_1 u + a_1 v\}\,dy \\
\eta &= \int \{a_2 u - b_2 v\}\,dx - \{b_2 u + a_2 v\}\,dy \\
\zeta &= \int \{a_3 u - b_3 v\}\,dx - \{b_3 u + a_3 v\}\,dy
\end{aligned}
\tag{12}
$$

wodurch wir über den Zusammenhang der Vektorkomponenten u_i und v_i und der diesen entsprechenden Minimalfläche orientiert sind.

Um uns über die Bedeutung der eingeführten Abkürzungen Rechenschaft zu geben, betrachten wir die sphärische Abbildung der zu $\mathfrak{F}(s)$ gehörenden Minimalfläche.

Aus den Formeln 2) berechnet sich der Einheitsvektor der Flächennormalen (siehe Blaschke, Differentialgeometrie, Bd. I., pag. 167) zu:

$$
\begin{aligned}
n_1 &= \frac{s + s_1}{ss_1 + 1} = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \\
n_2 &= \frac{-i(s - s_1)}{ss_1 + 1} = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \\
n_3 &= \frac{ss_1 - 1}{ss_1 + 1} = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Durch Angabe der komplexen Zahl $s = x + iy$ ist also der Normalenvektor der Minimalfläche festgelegt und umgekehrt.

In den Ausdrücken 13) erkennen wir die Formeln für die stereographische Projektion der Kugel auf die Ebene. Die Werte für die Komponenten des Flächennormalenvektors $\mathfrak{n}$ *sind unabhängig von der Funktion* $\mathfrak{F}(s) = u + iv$, *d. h. für jeden Punkt in der* x, y *Ebene sind in entsprechenden Punkten aller, in dieser speziellen Parameterdarstellung gegebenen Minimalflächen die Normalen parallel.*

Bilden wir nun für jeden Punkt ξ, η, ζ der Minimalfläche zwei aufeinander senkrechtstehende Vektoren von gleicher absoluter Länge, die die Tangentialebene im Punkte n_1, n_2, n_3 der Kugel aufspannen und die zur Tangentialebene der Minimalfläche im entsprechenden Punkte parallel ist, was der Eigenschaft der sphärischen Abbildung entspricht, so führt uns dies zu den folgenden Ausdrücken:

$$
\begin{aligned}
& n_{1x} = \frac{2}{N^2}\{1 - x^2 + y^2\}; \quad n_{1y} = -\frac{4xy}{N^2} \\
14) \qquad & n_{2x} = -\frac{4xy}{N^2}; \quad n_{2y} = \frac{2}{N^2}\{1 + x^2 - y^2\} \\
& n_{3x} = \frac{4x}{N^2}; \quad n_{3y} = \frac{4y}{N^2}
\end{aligned}
$$

wobei $N = 1 + x^2 + y^2$ bedeutet.

Für obige Vektoren $\mathfrak{n}_x$ und $\mathfrak{n}_y$ gelten dann die leicht zu verifizierenden Eigenschaften:

$$\mathfrak{n}_x^2 = \mathfrak{n}_y^2 = \frac{4}{N^2}, \quad \mathfrak{n}_x \mathfrak{n}_y = 0, \quad \mathfrak{n}\mathfrak{n}_x = \mathfrak{n}\mathfrak{n}_y = 0$$

Daraus ergibt sich das Quadrat des Bogenelementes des sphärischen Bildes der Minimalfläche im betrachteten Punkte zu:

$$15) \qquad d\sigma^2 = \frac{4}{N^2}\{dx^2 + dy^2\}$$

und wir ersehen, daß die Abbildung eine konforme ist. (Bekanntlich sind die Minimalflächen, abgesehen von den Kugeln, die einzigen Flächen, deren sphärisches Bild ein conformes ist.)

Setzt man jetzt:

$$16) \qquad \begin{aligned} a_1 &= \frac{N^2}{2} n_{1x} \quad \text{und} \quad b_1 = \frac{N^2}{2} n_{1y} \\ a_2 &= \frac{N^2}{2} n_{2x} \qquad\quad b_2 = \frac{N^2}{2} n_{2y} \\ a_3 &= \frac{N^2}{2} n_{3x} \qquad\quad b_3 = \frac{N^2}{2} n_{3y} \end{aligned}$$

so findet sich daraus für die Vektoren:

$$\mathfrak{a} = \frac{N^2}{2} \mathfrak{n}_x \quad \text{und} \quad \mathfrak{b} = \frac{N^2}{2} \mathfrak{n}_y$$

die Beziehung:

$$\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{b}^2 = N^2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0$$

Wir haben demnach gefunden, daß die in den Formeln 12) gebrauchten Abkürzungen a_i und b_i die Komponenten zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sind, die im Punkte n_1, n_2, n_3 der Kugel aufeinander senkrecht stehen und gleichen absoluten Betrag aufweisen. Aus 16) ist uns sofort ersichtlich, daß $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ mit den „gestreckten" Tangenten der x- und y-Richtung im betrachteten Kugelpunkt zusammenfallen.

Nun ist es ohne weiteres gegeben, die Gleichungen 12) in Vektorform zu schreiben und wir setzen dafür an:

$$17) \qquad \mathfrak{x} = \int \mathfrak{u}\, dx - \mathfrak{v}\, dy$$

wobei gilt:

$$II) \qquad \underline{\mathfrak{u} = \mathfrak{a} u - \mathfrak{b} v, \quad \mathfrak{v} = \mathfrak{b} u + \mathfrak{a} v}$$

ferner:

$$\mathfrak{u}^2 = \mathfrak{v}^2 = N^2 (u^2 + v^2); \quad \mathfrak{u} \cdot \mathfrak{v} = 0$$

Auf die flächentheoretische Bedeutung der Formel II) kommen wir später zu sprechen.

Führen wir noch folgende in Komponentenform geschriebene Gleichungen an: $(i = 1, 2, 3)$

$$u_i = a_i u - b_i v; \quad v_i = b_i u + a_i v$$

nebst den dazu inversen Gleichungen:

18) $$u = A_i u_i - B_i v_i; \quad v = B_i u_i + A_i v_i$$

wobei

$$A_i = \frac{a_i}{\Delta_i}, \quad B_i = -\frac{b_i}{\Delta_i}, \quad \Delta_i = a_i^2 + b_i^2$$

bedeuten.

Wie uns die Beziehung 18) zeigt, ist u durch drei Gleichungen zu bestimmen und ebenso v; die diesbezüglichen Δ_i lauten:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad (x^2 + y^2)^2 + 2(y^2 - x^2) + 1 > 0 \\ &\text{b)} \quad (x^2 + y^2)^2 + 2(x^2 - y^2) + 1 > 0 \\ &\text{c)} \quad x^2 + y^2 > 0 \end{aligned}$$

Aus ihnen folgt, daß 18) stets eine Lösung gestattet, denn Δ_i verschwindet für keine der drei Indexziffern.

Zusammenfassend können wir aussprechen:

Satz 1. *Zu jeder analytischen Funktion gehört ein räumliches Vektorpaar* u, v, *das den Gleichungen II) genügt. Die zugehörige Minimalfläche ist durch 17) gegeben.*

Was wir bis jetzt namentlich erreicht haben ist eine knappe Darstellung der Formeln von Weierstraß, der zu einer analytischen Funktion $\mathfrak{F}(s)$ gehörenden Minimalfläche.

Die lineare Bildung von u und v aus a und b durch die Formeln II) lehrt uns, daß die beiden Vektoren u, v in einer zur Tangentenebene an die Kugel, im entsprechenden Punkte n_1, n_2, n_3, parallelen Ebene liegen. Den Fortschreitungsrichtungen x, y der Gaußschen Zahlenebene entsprechen auf der Kugel diejenigen der Vektoren a und b und wir werden später erkennen, daß diesen eben betrachteten Fortschreitungsrichtungen, auf der durch $\mathfrak{F}(s)$ gegebenen Minimalfläche, die der Vektoren u und v entsprechen, wenn wir vom Vorzeichen absehen.

Des ferneren zeigt uns II) die Abhängigkeit der Vektoren u und v vom Real- und Imaginärteil der Funktion $\mathfrak{F}(s)$. Im folgenden

Paragraphen machen wir von der vektoriellen Schreibweise Gebrauch zur Berechnung der ersten Grundform; später zur Aufstellung der zur Fläche 17) adjungierten Minimalfläche.

§ 3.

Das Quadrat des Bogenelementes der Minimalfläche 17) ist gegeben durch:

19) $$d\mathfrak{x}^2 = (\mathfrak{u}\,dx - \mathfrak{v}\,dy)^2 = N^2(u^2 + v^2)(dx^2 + dy^2)$$

Demnach ist:

$$E = G = N^2(u^2 + v^2) = N^2\mathfrak{F}(s)\,\mathfrak{F}_1(s_1) \quad \text{und} \quad F = 0$$

Die Minimalfläche ist also konform auf die xy-Ebene abgebildet, ihr sphärisches Bild nach 15) ebenfalls, demnach gilt die Konformität der Abbildung auch zwischen Minimalfläche und dem durch parallele Normalen vermittelten Bild der Gauß'schen Kugel.

Erinnern wir uns der Ausdrücke 9) und hier speziell der Integrale:

$$\int v_i\,dx + u_i\,dy,$$

so liegt sofort auf der Hand, zu welchem Resultat man gelangt, wenn anstelle des reellen Teils der Funktionen f, g, h deren imaginärer berechnet wird. Nach den ganzen Entwicklungen des vorigen Abschnittes stoßen wir wieder auf eine Minimalfläche und ohne die Rechnung durchführen zu müssen, können wir als Ausdruck einer neuen, zu den Vektoren $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ gehörenden Minimalfläche hinschreiben:

20) $$\mathfrak{y} = \int \mathfrak{v}\,dx + \mathfrak{u}\,dy$$

Ihr Quadrat des Bogenelementes berechnet sich aus:

$$d\mathfrak{y}^2 = \{\mathfrak{v}\,dx + \mathfrak{u}\,dy\}^2 = N^2(u^2 + v^2)(dx^2 + dy^2)$$

stimmt also mit demjenigen der Minimalfläche 17) überein, was besagt, daß 20) eine Biegungsfläche der Fläche 17) ist, deren Glei-

chung in den im ersten Paragraphen gebrauchten erzeugenden Funktionen l, m, n geschrieben, lautet:

$$\xi = \frac{1}{2i}\{l - l_1\}, \quad \eta = \frac{1}{2i}\{m - m_1\}, \quad \zeta = \frac{1}{2i}\{n - n_1\}$$

In der Theorie der Minimalflächen wird diese, die zur Fläche 17) adjungierte Fläche genannt.

Beachten wir, daß $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$, wie übrigens auch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen genügen, und setzen wir: $\mathfrak{w} = \mathfrak{u} + i\mathfrak{v}$, $ds = dx + i\,dy$, so lassen sich die Minimalflächen 17) resp. 20) durch die beiden folgenden Integrale darstellen:

21) $$\mathfrak{x} = \Re \int \mathfrak{w}\, ds; \quad \mathfrak{y} = \Im \int \mathfrak{w}\, ds$$

Diese Ausdrücke sind gleichbedeutend mit denen, die Schwarz in seinen Mathematischen Abhandlungen, Bd. I., pag. 177, angibt. Schreibt man:

$$\chi = \mathfrak{x} + i\mathfrak{y} = \int \mathfrak{w}\, ds; \quad \chi_1 = \mathfrak{x} - i\mathfrak{y} = \int \mathfrak{w}_1\, ds_1$$

wo χ und χ_1 als Funktionen von s aufzufassen sind, so haben wir in dieser Darstellung die beiden konjugiert-imaginären isotropen Kurven vor uns, die als Leit- und Schiebekurve die Translationsfläche 17) erzeugen und für die gilt: $d\chi^2 = 0$ und $d\chi_1^2 = 0$.

Also läßt sich setzen:

22) $$\mathfrak{x} = \frac{1}{2}\{\chi + \chi_1\}, \quad \mathfrak{y} = \frac{1}{2i}\{\chi - \chi_1\}$$

wodurch die pag. 8 und 17 aufgeführten Formeln in je eine zusammengefaßt sind.

Berechnen wir noch $d\chi\, d\chi_1 = d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2 = 2\,d\mathfrak{x}^2$ d. h.:

23) $$d\mathfrak{x}^2 = \tfrac{1}{2}\, d\chi\, d\chi_1 = \tfrac{1}{2}\{dl\, dl_1 + dm\, dm_1 + dn\, dn_1\}$$

Das ist der, auf der gleichen Seite oben genannten Werkes, von Schwarz angegebene Satz, der bekanntlich durch Riemann seine geometrische Interpretation erhalten hat.

Die letzten Betrachtungen haben mehr formalen Charakter, lassen sich doch die diesbezüglichen Größen nicht mehr als Vektoren und Komponenten von solchen deuten, aber sie können als zusammengefaßte Rechnungsgrößen von Nutzen sein.

Von den Formeln 17) ausgehend wollen wir nun ein Beispiel einer Minimalfläche geben und zeigen wie man unter besonders einfachen Annahmen für die vorgelegte Funktion $\mathfrak{F}(s) = u + i\,v$ zu einer altbekannten Fläche gelangt. Es sei $\mathfrak{F}(s) = 1$, d. h. $u = 1$, $v = 0$. Dann ergeben die Formeln für die Vektorkomponenten von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$:

$$u_i = a_i\,, \quad v_i = b_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Umgekehrt folgt aus $u_i = k \cdot a_i$, wo k eine Konstante bedeutet, sofort $v_i = k \cdot b_i$, d. h. für $\mathfrak{F}(s)$ gleich k.

Nach 12) schreiben wir für die zugehörige Minimalfläche:

$$\begin{aligned} \xi &= \int (1 - x^2 + y^2)\,dx + 2\int xy\,dy \\ \text{24)} \qquad \eta &= -2\int xy\,dx - \int (1 + x^2 - y^2)\,dy \\ \zeta &= 2\int x\,dx - 2\int y\,dy \end{aligned}$$

Daraus für das Quadrat des Bogenelementes:

$$dS^2 = (1 + x^2 + y^2)^2\,(dx^2 + dy^2)$$

und für die Parameterdarstellung der Fläche:

$$\begin{aligned} \xi &= x - \frac{x^3}{3} + xy^2 \\ \eta &= -\left\{y - \frac{y^3}{3} + x^2 y\right\} \\ \zeta &= x^2 - y^2 \end{aligned}$$

Wir erhalten hier die von Enneper erstmals aufgestellte und nach ihm benannte Minimalfläche. (Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. IX., 1864.)

§ 4.

Es liegt uns nun besonders daran, die Koeffizienten der zweiten Grundform zu berechnen, für die durch die Formeln 1) gegebene Parameterdarstellung der zu $\mathfrak{F}(s)$ gehörenden Minimalfläche.

Es ist nach 17) $\quad d\mathfrak{x} = \mathfrak{u}\,dx - \mathfrak{v}\,dy = \mathfrak{x}_x\,dx + \mathfrak{x}_y\,dy$

woraus wegen der Unabhängigkeit von dx und dy, die für uns wichtige Beziehung:

III) $\quad \underline{\mathfrak{u} = \mathfrak{x}_x\,; \quad \mathfrak{v} = -\mathfrak{x}_y}$ folgt.

Für die Koeffizienten der zweiten Grundform der Flächentheorie gilt allgemein:

$$L = -\mathfrak{n}_x\,\mathfrak{x}_x\,; \quad M = -\mathfrak{n}_x\,\mathfrak{x}_y = -\mathfrak{n}_y\,\mathfrak{x}_x\,; \quad N = \mathfrak{n}_y\,\mathfrak{x}_y$$

Die Formeln II) gestatten uns nun, in Verbindung mit III) die Werte in obigen Ausdrücken einzusetzen.

So wird, wenn $N = 1 + x^2 + y^2$ bedeutet:

$$L = -\mathfrak{n}_x\,\mathfrak{x}_x = -\frac{N^2}{2}\{\mathfrak{n}_x{}^2\,u - \mathfrak{n}_x\,\mathfrak{n}_y\,v\}$$

25) $$M = -\mathfrak{n}_x\,\mathfrak{x}_y = +\frac{N^2}{2}\{\mathfrak{n}_x\,\mathfrak{n}_y\,u + \mathfrak{n}_x{}^2\,v\}$$

$$N = -\mathfrak{n}_y\,\mathfrak{x}_y = +\frac{N^2}{2}\{\mathfrak{n}_y{}^2\,u + \mathfrak{n}_x\,\mathfrak{n}_y\,v\}$$

und die diesbezüglichen Ausdrücke auf pag. 13 berücksichtigt werden. Des weitern ergibt sich hieraus:

26) $\quad \underline{L = -2u\,; \quad M = +2v\,; \quad N = +2u}$

Sprechen wir dieses Ergebnis in folgendem Satze aus:

Satz 2. *Die durch die spezielle Parameterdarstellung 1) der Minimalfläche bedingten Fundamentalgrößen zweiter Ordnung hangen auf's einfachste mit der zugehörigen analyt. Funktion $\mathfrak{F}(s)$, durch die Formeln 26) zusammen.*

Aus obigem Ergebnis lassen sich nun einige Folgerungen ziehen, von denen wir, für das am Ende des vorigen Paragraphen

betrachtete Beispiel, vorerst Gebrauch machen wollen. Da galt $u = 1$, $v = 0$ oder mit andern Worten:

Die Schar der achsenparallelen Geraden der xy-Ebene entspricht derjenigen der Krümmungslinien auf der Fläche von Enneper.

Oder wenn wir zur adjungierten Minimalfläche der eben betrachteten übergehen.

Der zweifach unendlichen Schar von Asymptotenlinien, auf der zur Enneper'schen Minimalfläche adjungierten Fläche, entspricht diejenige der Achsenparallelen der Parameterebene.

Dies ist ein Beispiel eines allgemein gültigen Satzes zwischen ursprünglicher Minimalfläche und ihrer Adjungierten. Auf den allgemeinen Satz, der von B o n n e t stammt, werden wir nachher noch stoßen.

Des fernern folgt aus 26) wegen $LN - M^2 = -4(u^2 + v^2)$, daß die Minimalflächen in allen ihren reellen Punkten hyperbolische Krümmung aufweisen und dort gleichseitige Hyperbeln als Indikatricen besitzen.

Daß die Ebene nicht mittelst der Gleichung 17) darstellbar ist, lehren die Formeln 26) ebenfalls.

Wir prüfen nun noch einige bekannte Formeln der Flächentheorie anhand der allgemein gültigen Ausdrücke. Die mittlere Krümmung ist gegeben durch:

$$27) \qquad H = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} = \frac{N + L}{E} = 0$$

und verschwindet identisch. Durch diese Tatsache sind diese Flächen ja auch charakterisiert.

Für das G a u ß 'sche Krümmungsmaß ergibt sich leicht folgender Ausdruck:

$$28) \qquad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{-4(u^2 + v^2)}{N^4(u^2 + v^2)^2} = \frac{-4}{N^4(u^2 + v^2)}$$

Wir wollen ihn später noch auf direktem Wege herleiten.

Einfache Gestalt und Abhängigkeit, vom reellen und imaginären Teil der zur Minimalfläche 17) gehörenden analytischen

Funktion, nehmen in dieser Parameterdarstellung die Differentialgleichungen der Krümmungslinien und der Asymptotenlinien an.

Für die Krümmungslinien finden wir aus:

$$\begin{vmatrix} E\,dx + F\,dy, & L\,dx + M\,dy \\ F\,dx + G\,dy, & M\,dx + N\,dy \end{vmatrix} = 0$$

29) $$\underline{v\,(dy^2 - dx^2) - 2\,u\,dx\,dy = 0}$$

und analog berechnet sich die Differentialgleichung für die Haupttangentenkurven aus:

$$L\,dx^2 + 2\,M\,dx\,dy + N\,dy^2 = 0$$

zu:

30) $$\underline{u\,(dy^2 - dx^2) + 2\,v\,dx\,dy = 0}$$

Stellt man aus 29) und 30) die entsprechenden Fortschreitungsrichtungen auf, so bekommt man:

für die Krümmungslinien $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \frac{u}{v} \pm \sqrt{1 + \frac{u^2}{v^2}}$

„ „ Asymptoten „ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = -\frac{v}{u} \pm \sqrt{1 + \frac{v^2}{u^2}}$

Beachten wir nun, daß die zu v konjugierte Potentialfunktion gleich $-u$ ist, so entsprechen sich also Krümmungslinien und Haupttangentenkurven auf der ursprünglichen Minimalfläche und deren Adjungierten und umgekehrt. Damit ist der auf Seite 20 angeführte und für ein einfaches Beispiel gezeigte Satz von Bonnet, allgemein bewiesen.

Wir stellen noch aus:

$$(L\,N - M^2)\,R^2 - (E\,N - 2\,F\,M + G\,L)\,R + (E\,G - F^2) = 0$$

die Größen für die beiden Hauptkrümmungsradien auf und erhalten:

31) $$R_{1,2} = \pm \frac{N^2}{2} \sqrt{u^2 + v^2}$$

Für den Zusammenhang der Fundamentalgrößen erster Ordnung der Fläche mit denjenigen der Einheitskugel gelten hier, da $H = 0$ ist, die nachstehenden Formeln:

$$KE = -e, \quad KF = -f, \quad KG = -g, \quad \text{also:}$$
$$e = g, \quad f = 0$$

d. h. es ist: $d\sigma^2 = -KE(dx^2 + dy^2) = \frac{4}{N^2}(dx^2 + dy^2)$

was mit der Formel 15) übereinstimmt.

Will man in die Flächentheorie einen tieferen Einblick gewinnen, so werden, analog den Formeln von Frenet in der Kurventheorie, die Ableitungen der Vektoren $\mathfrak{x}_x$, $\mathfrak{x}_y$ und $\mathfrak{n}$ aus diesen selbst linear zusammengesetzt.

Die diesbezüglichen Ableitungsformeln von Weingarten lauten:

$$D^2\,\mathfrak{n}_x = (FM - GL)\,\mathfrak{x}_x + (FL - EM)\,\mathfrak{x}_y$$
$$D^2\,\mathfrak{n}_y = (FN - GM)\,\mathfrak{x}_x + (FM - EN)\,\mathfrak{x}_y$$

Setzen wir die aus 14) oder 16) und aus 26) bekannten Werte darin ein, so kommt das folgende Gleichungssystem heraus:

32)
$$\mathfrak{a} = \frac{u}{u^2 + v^2}\,\mathfrak{u} + \frac{v}{u^2 + v^2}\,\mathfrak{v}$$
$$\mathfrak{b} = \frac{-v}{u^2 + v^2}\,\mathfrak{u} + \frac{u}{u^2 + v^2}\,\mathfrak{v}$$

Dies ist aber nichts anderes als das zu II) inverse System von Gleichungen.

Ist ein rechtwinkliges, räumliches Koordinatenkreuz gegeben, ferner eine analytische Funktion $\mathfrak{F}(s) = u + i\,v$, so ist dadurch eine bis auf die Lage im Raum eindeutig bestimmte Minimalfläche gegeben, wenn die sechs Fundamentalgrößen den drei voneinander unabhängigen partiellen Differentialgleichungen, die die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie heißen, genügen.

Die erste dieser ist der Ausdruck für das Gauß'sche Krümmungsmaß, der sich allein durch E, F, G und deren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung ausdrücken läßt. Die zwei anderen sind die sogenannten Gleichungen von Mainardi und Codazzi, die in übersichtlicher Form so angeordnet werden können (Blaschke, Differentialgeometrie, Bd. I., pag. 79):

$$\text{a)} \quad \begin{matrix}(EG - 2FF + GE)(L_y - M_x) \\ -(EN - 2FM + GL)(E_y - F_x)\end{matrix} + \begin{vmatrix} E & E_x & L \\ F & F_x & M \\ G & G_x & N \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{b)} \quad \begin{matrix}(EG - 2FF + GE)(M_y - N_x) \\ -(EN - 2FM + GL)(F_y - G_x)\end{matrix} + \begin{vmatrix} E & E_y & L \\ F & F_y & M \\ G & G_y & N \end{vmatrix} = 0$$

Berücksichtigen wir die Ausdrücke für die sechs Fundamentalgrößen, so gehen über:

$$\text{a)} \quad 2E^2\{L_y - M_x\} + \begin{vmatrix} E & E_x & -N \\ 0 & 0 & M \\ E & E_x & N \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{b)} \quad 2E^2\{M_y + L_x\} + \begin{vmatrix} E & E_y & -N \\ 0 & 0 & M \\ E & E_y & N \end{vmatrix} = 0$$

Die Determinanten in a) und b) verschwinden und es bleiben als Bedingung nur die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen:

$$33) \quad L_y - M_x = 0, \quad M_y + L_x = 0; \quad -u_y = v_x, \quad u_x = v_y$$

Fassen wir die beiden letzten Ergebnisse in einem Satze zusammen und schreiben.

Satz 3. *Die Formeln II) für die Vektoren* $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ *der durch 17) gegebenen Minimalfläche sind die Ableitungsformeln von Weingarten. Die Fundamentalgleichungen von Mainardi und Codazzi, der zu* $\mathfrak{F}(s) = u + iv$ *gehörenden Minimalfläche, sind nichts anderes als die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen der Funktion* $\mathfrak{F}(s)$.

Zum Schlusse dieses Paragraphen leiten wir noch mit Hilfe der Gleichungen II) das Krümmungsmaß auf direktem Wege her, als Quotienten der entsprechenden Oberflächenelemente von Minimalfläche und Gauß'scher Kugel.

Es ist bekanntlich:

$$K = \frac{dw}{do} = \frac{(\mathfrak{n}_x\, dx,\ \mathfrak{n}_y\, dy,\ \mathfrak{n})}{(\mathfrak{x}_x\, dx,\ \mathfrak{x}_y\, dy,\ \mathfrak{n})}$$

wo die Klammern die diesbezüglichen Determinanten in vektorieller Schreibweise bedeuten und dw das Oberflächenelement der Kugel, do dasjenige der Minimalfläche ist.

Durch III) sind uns die Größen ξ_x, ξ_y bekannt und wir können schreiben:

$$do = (\mathfrak{u}\,dx, -\mathfrak{v}\,dy, \mathfrak{n}) = (\{\mathfrak{a}u - \mathfrak{b}v\}\,dx, -\{\mathfrak{b}u + \mathfrak{a}v\}\,dy, \mathfrak{n})$$

und daraus nach bekannten Regeln der Determinantenrechnung:

$$do = (\mathfrak{a}u\,dx, -\{\mathfrak{b}u + \mathfrak{a}v\}\,dy, \mathfrak{n}) + (-\mathfrak{b}v\,dx, -\{\mathfrak{b}u + \mathfrak{a}v\}\,dy, \mathfrak{n})$$

oder diese Klammern noch einmal entwickelt:

$$do = (\mathfrak{b}u\,dy, \mathfrak{a}u\,dx, \mathfrak{n}) + (\mathfrak{a}v\,dy, \mathfrak{a}u\,dx, \mathfrak{n}) + (\mathfrak{b}u\,dy, -\mathfrak{b}v\,dx, \mathfrak{n}) + (\mathfrak{a}v\,dy, -\mathfrak{b}v\,dx, \mathfrak{n})$$

und schließlich:

$$u^2\,dx\,dy(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{n}) - v^2\,dx\,dy(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{n}) = (u^2 + v^2)(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{n})\,dx\,dy$$

da die beiden mittleren Determinanten verschwinden.

Das führt uns zum Ausdruck:

33) $$do = -(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{n})(u^2 + v^2)\,dx\,dy$$

Genau auf demselben Wege errechnet sich dw, unter Berücksichtigung der Formeln 16), zu:

34) $$dw = \frac{4}{N^4}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{n})\,dx\,dy$$

woraus dann durch Division mit 33) der Ausdruck 28) für das Gaußʼsche Krümmungsmaß hervorgeht.

Orientieren wir uns noch über den Wert der Determinante $\Delta = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{n})$, so schreibt sich diese in der Form:

$\Delta = [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]\,\mathfrak{n}$, wo die eckige Klammer das äußere Produkt bezeichnen soll.

Nun ist:

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \sin(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{n}$$

Da $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0$ und $|\mathfrak{a}| = \mathfrak{b}| = N$ bedeutet, erhalten wir für Δ den Wert:

35) $$\Delta = N^2 \cdot \mathfrak{n}^2 = (1 + x^2 + y^2)^2$$

Aus 33) und 34) ergibt sich mit Verwendung des Wertes Δ, die auf Seite 22 angeführte Beziehung: $E\,K = -e$.

Beachten wir noch den Quotienten $do : dx\,dy$ aus 33), so ist er abgesehen vom Vorzeichen gleich demjenigen aus $dS^2 : (dx^2 + dy^2)$. Dies hängt damit zusammen, daß die Parameter xy die Eigenschaft haben, die Fläche mit einem zweifach-unendlichen Kurvennetz zu überziehen, das diese in unendliche kleine Quadrate einteilt, einer Tatsache, die mit dem Ausdruck isotherm belegt wird.

§ 5.

Bevor wir uns in diesem Abschnitt mit der Darstellung der Biegungsflächen von Minimalflächen und einigen wesentlichen Eigenschaften derselben befassen, treten wir noch auf das Folgende ein:

Es ist uns ein Leichtes, den Winkel zu berechnen, der in irgend einem Punkte der Minimalfläche von der Tangente $\mathfrak{x}_x = \mathfrak{u}$ mit der im entsprechenden Kugelpunkt vorhandenen Tangente $\mathfrak{n}_x = \frac{2}{N^2}\,\mathfrak{a}$ einerseits, anderseits denjenigen mit der Tangente $\mathfrak{n}_y = \frac{2}{N^2}\,\mathfrak{b}$, gegildet wird.

Diese beiden Winkel hangen auf's einfachste mit der analytischen Funktion zusammen und sind auf folgende Weise gegeben:

36)
$$\cos\alpha = \frac{\mathfrak{u}}{|\mathfrak{u}|}\cdot\frac{\mathfrak{a}}{|\mathfrak{a}|} = \frac{\mathfrak{a}\,u - \mathfrak{b}\,v}{N\sqrt{u^2+v^2}}\cdot\frac{\mathfrak{a}}{N} = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}$$
$$\cos\beta = \frac{\mathfrak{u}}{|\mathfrak{u}|}\cdot\frac{\mathfrak{b}}{|\mathfrak{b}|} = \frac{\mathfrak{a}\,u - \mathfrak{b}\,v}{N\sqrt{u^2+v^2}}\cdot\frac{\mathfrak{b}}{N} = \frac{-v}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

wobei $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ ist. Für die Enneper'sche Minimalfläche ist also $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$.

Ersetzt man in den Formeln 19) für das Quadrat des Bogenelementes der Minimalfläche 17) die Funktion $\mathfrak{F}(s)$ durch $e^{i\varphi}\,\mathfrak{F}(s)$ und entsprechend $\mathfrak{F}_1(s_1)$ durch $e^{-i\varphi}\,\mathfrak{F}_1(s_1)$, so wird dadurch, da die Länge des Linienelementes nicht geändert wird, eine Biegungs-

fläche der Ursprünglichen erhalten. Die reelle Größe φ kann dabei als variabler Parameter aufgefaßt werden und wir können diesem φ auch unendlich kleine Werte beilegen, so daß wir zum Begriffe der stetigen Biegung gelangen.

Aus der Form 19) kann man zeigen, daß zu einer gegebenen Fläche, durch die obigen Ersetzungen auch alle Biegungsflächen erhalten werden und nur solche wieder Minimalflächen sind. (Vergl. Darboux, théorie des surfaces Ier partie, pag. 334.)

Für unsere Ausdrucksweise sind demnach u und v zu ersetzen durch:

$$u \cos\varphi - v \sin\varphi; \qquad v \cos\varphi + u \sin\varphi$$

und dementsprechend gibt uns $\Re\{e^{i\varphi}\chi\}$, wo χ die durch die Formeln 22) eingeführte Rechnungsgröße ist, den für unsere Fragestellung gewünschten Ausdruck in der Form:

37) $$\mathfrak{z} = \mathfrak{x} \cos\varphi - \mathfrak{y} \sin\varphi$$

Vermöge $d\mathfrak{x} \cdot d\mathfrak{y} = 0$ ist für alle φ, $d\mathfrak{z}^2 = d\mathfrak{x}^2 = d\mathfrak{y}^2$

Es gelten nun für diese Biegungsflächen folgende Formeln: Aus

$$d\mathfrak{z} = d\mathfrak{x} \cos\varphi - d\mathfrak{y} \sin\varphi = (\mathfrak{u}\,dx - \mathfrak{v}\,dy)\cos\varphi - (\mathfrak{v}\,dx + \mathfrak{u}\,dy)\sin\varphi$$

folgt: $$d\mathfrak{z} = \{\mathfrak{u}\cos\varphi - \mathfrak{v}\sin\varphi\}\,dx - \{\mathfrak{v}\cos\varphi + \mathfrak{u}\sin\varphi\}\,dy$$

und dies verglichen mit

$$d\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_x\,dx + \mathfrak{z}_y\,dy \qquad \text{liefert:}$$

38)
$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_x &= \mathfrak{u}\cos\varphi - \mathfrak{v}\sin\varphi \\ -\mathfrak{z}_y &= \mathfrak{v}\cos\varphi + \mathfrak{u}\sin\varphi \end{aligned}$$

ferner für die zweiten Ableitungen:

39)
$$\begin{aligned} &\mathfrak{z}_{xx} = \mathfrak{u}_x\cos\varphi - \mathfrak{v}_x\sin\varphi; \quad -\mathfrak{z}_{yy} = \mathfrak{v}_y\cos\varphi + \mathfrak{u}_y\sin\varphi \\ &\mathfrak{z}_{xy} = \mathfrak{u}_y\cos\varphi - \mathfrak{v}_y\sin\varphi = -(\mathfrak{v}_x\cos\varphi + \mathfrak{u}_x\sin\varphi) \end{aligned}$$

Wir fragen nach den Ausdrücken für die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform, die wir mit L, $M_\mathfrak{z}$, $N_\mathfrak{z}$ bezeichnen wollen. Sie lassen sich natürlich aus den dafür geltenden Beziehungen:

$$L_\mathfrak{z} = \mathfrak{n}\,\mathfrak{z}_{xx}; \quad M_\mathfrak{z} = \mathfrak{n}\,\mathfrak{z}_{xy}; \quad N_\mathfrak{z} = \mathfrak{n}\,\mathfrak{z}_{yy}$$

berechnen. Wir brauchen dies aber nicht zu tun, sondern wir können einfach die notwendigen Ersetzungen in den Gleichungen 26) durchführen:

Demzufolge finden wir:

$$
\begin{aligned}
L_{\mathfrak{z}} &= -2\{u\cos\varphi - v\sin\varphi\} \\
M_{\mathfrak{z}} &= +2\{v\cos\varphi + u\sin\varphi\} \\
N_{\mathfrak{z}} &= +2\{u\cos\varphi - v\sin\varphi\}
\end{aligned}
\qquad 26\,a)
$$

Durch $\varphi = 0$ werden die Größen der Fläche $\mathfrak{x}$ erhalten. Die Adjungierte, wo $-u$ die zu v konjugiert harmonische Funktion bedeutet, gehört zum Werte $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Aber auch die Biegungsfläche für $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ wird mit dem Namen der Adjungierten bezeichnet.

Geben wir noch für einige spezielle Werte von φ die zugehörigen Minimalflächen 37) an. Es sei der Reihe nach für φ gesetzt: $0, -\frac{\pi}{2}, -\pi$, dann wird das entsprechende $\mathfrak{z}(\varphi)$:

$$\mathfrak{z}(0) = \mathfrak{x}; \quad \mathfrak{z}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \mathfrak{y}; \quad \mathfrak{z}(-\pi) = -\mathfrak{x}$$

Wir ersehen hieraus, wie man durch stetige Biegung von der ursprünglichen Minimalfläche zu ihrer Adjungierten und schließlich zu der am Nullpunkt gespiegelten Fläche gelangen kann. Dabei sind alle auf diesem Wege erhaltenen Flächen Minimalflächen und Biegungsflächen der Ursprünglichen.

Wir haben zu Anfang dieses Paragraphen gesehen, wie für jede analytische Funktion auf der zugehörigen Minimalfläche die den Punkten x, y entsprechenden Vektoren $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ der Fläche, gegen die Achsen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ im betrachteten Punkte geneigt sind und die betr. Winkel berechnet. Tun wir dies nochmals, nicht für die ursprüngliche Fläche, sondern für irgend eine der zu ihr verbogenen Minimalflächen. Der diesbezügliche Winkel werde mit Φ bezeichnet.

Dann findet man:

$$\cos\Phi = \frac{\mathfrak{z}x}{|\mathfrak{z}x|}\cdot\frac{\mathfrak{a}}{|\mathfrak{a}|} = \frac{\mathfrak{u}\cos\varphi - \mathfrak{v}\sin\varphi}{N\sqrt{u^2+v^2}}\cdot\frac{\mathfrak{a}}{N}$$

denn $$\mathfrak{z}_x^2 = \mathfrak{u}^2 \cos^2\varphi + \mathfrak{v}^2 \sin^2\varphi = N^2(u^2+v^2)$$

Daraus:

$$\cos\Phi = \frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{u}\cos\varphi - \mathfrak{a}\,\mathfrak{v}\sin\varphi}{N^2\sqrt{u^2+v^2}}$$ und für $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$

die Werte eingesetzt:

$$\cos\Phi = \frac{\mathfrak{a}^2 u\cos\varphi - \mathfrak{a}^2 v\sin\varphi}{N^2\sqrt{u^2+v^2}} = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\cos\varphi - \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\sin\varphi$$

oder indem wir die Beziehung 36) heranziehen:

40) $$\cos\Phi = \cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi = \cos(\alpha-\varphi)$$

Wir sprechen nun folgendes aus:

Satz 4. *Auf der durch jede analytische Funktion $\mathfrak{F}(s)$ charakterisierten Minimalfläche, entspricht den beiden Scharen achsenparalleler Geraden der Gauß'schen Zahlenebene ein Kurvennetz, dessen in jedem Punkte gegebene Fortschreitungsrichtungen mit den entsprechenden des sphärischen Bildes die Winkel 36) bilden und deren Größe allein von $\mathfrak{F}(s)$ abhängt.*

Für die zum Parameter φ gehörige Biegungsfläche ist der Cosinus dieses Winkels durch die Formel 40) gegeben.

Aus der Tatsache, daß $E_\mathfrak{z} = E_\mathfrak{x} = G_\mathfrak{x}$ und $F_\mathfrak{z} = 0$, sowie aus den Ausdrücken 26a) lassen sich die im vorigen Paragraphen für die Fläche $\mathfrak{x}$ behandelten Fragestellungen nun leicht, für jede beliebige Biegungsfläche, beantworten.

Wir wollen diese Wiederholung aber nicht vornehmen und uns allein nur noch mit dem Gauß'schen Krümmungsmaß beschäftigen.

Setzt man in 28) die nun hier geltenden Ausdrücke ein, so kann bekanntlich nichts Neues herauskommen, da K biegungsinvariant ist. D. h. entsprechende Punkte zweier aufeinander verbiegbaren Flächen haben dasselbe Krümmungsmaß.

Wir können also ohne Rechnung setzen:

$$K = \frac{-4}{N^4(u^2+v^2)} = \frac{-4}{N^4\,\mathfrak{F}(s)\cdot\overline{\mathfrak{F}_1(s_1)}}$$

Dieser Satz ist jedoch für beliebige Flächen nicht umkehrbar, d. h. ist von zwei Flächen bekannt, daß in entsprechenden Punkten die Krümmungsmaße übereinstimmen, so ist nicht bewiesen, daß beide Flächen aufeinander verbiegbar sind.

Anders ist es jedoch bei den Minimalflächen. Nehmen wir an, die zu den beiden Funktionen $\mathfrak{F}(s)$ und $\mathfrak{G}(s)$ gehörenden Minimalflächen besitzen in allen entsprechenden Punkten gleiches Krümmungsmaß, so gilt demnach nach 28)

$$K = \frac{-4}{N^4\,\mathfrak{F}(s)\cdot\mathfrak{F}_1(s_1)} = \frac{-4}{N^4\,\mathfrak{G}(s)\cdot\mathfrak{G}_1(s_1)}$$

woraus folgt: $\mathfrak{F}(s)\,\mathfrak{F}_1(s_1) = \mathfrak{G}(s)\,\mathfrak{G}_1(s_1)$. Die allgemeinste Lösung dieser Beziehung lautet aber:

41) $$\mathfrak{G}(s) = e^{ia}\,\mathfrak{F}(s), \quad \mathfrak{G}_1(s_1) = e^{-ia}\,\mathfrak{F}_1(s_1)$$

Daraus ersehen wir also, daß der Satz von Gauß betr. die Biegungsinvarianz des Krümmungsmaßes für die Minimalflächen umkehrbar ist.

Um den Zusammenhang mit der analytischen Funktion $\mathfrak{F}(s)$ wieder etwas zu betonen, wählen wir ein spezielles Beispiel einer solchen. Es sei $\mathfrak{F}(s) = s^n$, wo n eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Wir erhalten für K den Ausdruck:

$$K = -\frac{4}{(1+x^2+y^2)^4}\cdot\frac{1}{(x^2+y^2)^n}$$

Beachten wir nun insbesondere die konzentrischen Kreise der x, y Ebene um den Nullpunkt: $x^2+y^2 = c$, so ist zu ersehen, daß in den diesen entsprechenden Kurven der Minimalfläche das Krümmungsmaß konstant bleibt. Zu diesen Flächen gehört auch die Enneper'sche Minimalfläche 24).

§ 6.

Es ist von Vorteil für die spezielle Behandlung von Beispielen, dann aber auch an sich interessierend, den Begriff der „Reciproken" Minimalfläche einzuführen. Darunter wollen wir diejenige Fläche

verstehen, die etwa aus der Darstellungsart 1) entsteht, wenn wir dort an die Stelle von $\mathfrak{F}(s)$ deren reciproke Funktion treten lassen.

Also gilt dann die Beziehung $u + i v = 1 : (\mu + i \nu)$ für die in den Weierstraß'schen Formeln auftretende Funktion $\mathfrak{F}(s)$.

Wir berechnen aus $(u + i v)(\mu + i \nu) = 1$ die Größen μ und ν, ausgedrückt durch u und v.

Es gelten die Gleichungen:

$$u\mu - v\nu = 1 \qquad \text{und}$$
$$v\mu + u\nu = 0$$

woraus wird:

$$\mu = \frac{u}{u^2 + v^2}, \qquad \nu = \frac{-v}{u^2 + v^2}$$

Daraus stellen wir die zu II) analogen Ausdrücke auf, wo $\mathfrak{u}_R$ und $\mathfrak{v}_R$ die zu der reciproken Funktion gehörenden Vektoren bedeuten. So erhält man:

IIa) $$\mathfrak{u}_R = \frac{\mathfrak{a} u + \mathfrak{b} v}{u^2 + v^2}. \qquad \mathfrak{v}_R = \frac{\mathfrak{b} u - \mathfrak{a} v}{u^2 + v^2}$$

Und es gelten die leicht zu verifizierenden Beziehungen:

$$\mathfrak{u}_R^2 = \frac{N^2}{u^2 + v^2} = \mathfrak{v}_R^2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{u}_R \cdot \mathfrak{v}_R = 0$$

Die reciproke Minimalfläche lautet nach 17):

$$\mathfrak{x}_R = \int \mathfrak{u}_R \, dx - \mathfrak{v}_R \, dy$$

Die dazu Adjungierte:

$$\mathfrak{y}_R = \int \mathfrak{v}_R \, dx + \mathfrak{u}_R \, dy$$

Betrachten wir nur die erste, so läßt sie sich also schreiben:

42) $$\mathfrak{x}_R = \int \frac{\mathfrak{a} u + \mathfrak{b} v}{u^2 + v^2} \, dx - \frac{\mathfrak{b} u - \mathfrak{a} v}{u^2 + v^2} \, dy$$

woraus sich für das Quadrat des Bogenelementes der folgende Ausdruck ergibt:

43) $$d\mathfrak{x}_R^2 = \frac{N^2}{u^2 + v^2}\{dx^2 + dy^2\}$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit derjenigen der ursprünglichen Fläche, so finden wir:

44) $$d\mathfrak{x}^2 = (u^2 + v^2)^2\, d\mathfrak{x}_R^2 = \{\mathfrak{F}(s)\,\mathfrak{F}_1(s)\}^2\, d\mathfrak{x}_R^2$$

Aus obigen Ausdrücken lassen sich die Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung hinschreiben. Es ist:

45) $$E_R = \frac{N^2}{u^2 + v^2};\quad L_R = \frac{-2u}{u^2 + v^2},\quad M_R = \frac{-2v}{u^2 + v^2},\quad N_R = -L_R$$

Aus ihnen folgt für das Krümmungsmaß der ursprünglichen und der reciproken Fläche die Beziehung:

46) $$K_R = \{\mathfrak{F}\,\mathfrak{F}_1\}^2 K$$

Stellt man für die reciproke Fläche die entsprechend den Formeln 29) und 30) berechneten Differentialgleichungen für die Krümmungs- und Asymptotenlinien auf und bildet, wie auf Seite 21, die diesbezüglichen Fortschreitungsrichtungen, so lauten diese:

Krümmungslinien: $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^{(R)}_{1,2} = -\frac{u}{v} \pm \sqrt{1 + \frac{u^2}{v^2}}$$

Asymptotenlinien: $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^{(R)}_{1,2} = +\frac{v}{u} \pm \sqrt{1 + \frac{v^2}{u^2}}$$

Bezeichnen wir mit λ_1, λ_2 und μ_1, μ_2 die beiden Wurzeln der Fortschreitungsrichtungen der Krümmungs- bezw. Asymptotenlinien der ursprünglichen Fläche und die entsprechenden Werte der reciproken Fläche mit λ_1', λ_2' und μ_1', μ_2', so gelten also die folgenden Bedingungen:

47) $$\begin{matrix} \lambda_1 = -\lambda_2' \\ \lambda_2 = -\lambda_1' \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} \mu_1 = -\mu_2' \\ \mu_2 = -\mu_1' \end{matrix}$$

Daraus ersehen wir das gegenseitige sich Entsprechen der Krümmungs- wie Asymptotenlinien der ursprünglichen und deren reciproken Fläche.

Sprechen wir nun folgenden Satz aus:

Satz 5. *Ursprüngliche Fläche und Reciproke sind nie Biegungsflächen voneinander, den trivialen Fall der Enneper'schen Minimalfläche ausgenommen.*

Auf der ursprünglichen- und reciproken Minimalfläche werden die beiden Scharen von Krümmungskurven untereinander vertauscht und der Sinn der Fortschreitungsrichtung auf ihnen ändert das Zeichen. Das gleiche gilt auch für die Schmiegtangenturkurven.

Berechnet man wie zu Anfang des vorigen Paragraphen die Winkel etwa von $\mathfrak{u}_R$ mit den Richtungen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, so erhält man, abgesehen vom Vorzeichen, dieselben Werte wie in den diesbezüglichen Formeln 36). Es ändert sich nur der Sinn des dort eingeführten Winkels.

Wir geben zum Schlusse dieses Abschnittes noch den Wert für den Cosinus des Winkels zwischen ursprünglichem Vektor $\mathfrak{u}$ und dem „reciproken" Vektor $\mathfrak{u}_R$ einerseits und anderseits den entsprechenden Wert für die Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}_R$ an.

Beide Werte stimmen überein und man erhält:

48) $$\cos\psi = \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}$$

§ 7.

Wir haben gesehen wie die zu einer analytischen Funktion $\mathfrak{F}(s)$ gehörende Minimalfläche durch die einfache Gestalt der Formel 17) dargestellt werden kann. Bei dieser Darstellung sind die Achsenparallelen der s-Ebene die Parameterlinien. Im speziellen Fall der Enneper'schen Minimalfläche sind die beiden Geradenscharen, wie aus den Gleichungen 26) sofort ersichtlich, die Krümmungsparameterlinien; auf der adjungierten Fläche die Asymptotenparameterlinien. Für eine beliebige Minimalfläche trifft dies jedoch nicht etwa zu.

Wir stellen uns nun noch die Aufgabe, die Gleichungen der Krümmungs- und Asymptotenkurven in allgemeinster Weise auf-

zustellen, in ihrer Abhängigkeit von $\mathfrak{F}(s) = u + iv$. Oder mit andern Worten: Welche Transformationen sind auf die bisherigen Parameter der Fläche auszuüben, damit die dadurch neu entstehenden Parameterlinien der s-Ebene den Krümmungs- bezw. den Asymptotenkurven der Minimalfläche entsprechen.

Nun bilden auch die beiden Scharen dieser zwei zu bestimmender Kurvennetze auf der Minimalfläche eine isotherme Einteilung, denn dafür ist notwendig und hinreichend, daß $E' = G'$ und $F' = 0$ ist, was für die unten vorzunehmende Ersetzung 49) gilt.

Somit handelt es sich, aus einem Netz spezieller isothermer Parameter dasjenige zu bestimmen, dem die Krümmungslinien bezw. Asymptotenlinien der Fläche entsprechen.

Sind nun x, y reelle thermische Parameter, so wird in allgemeinster Weise ein neues Paar solcher Parameter p, q gefunden, indem man setzt:

$$49) \qquad \begin{aligned} p + iq &= f(x + iy) \\ p &= p(xy), \quad q = q(xy) \end{aligned}$$

wo f eine beliebige analytische Funktion bedeutet.

Führt man diese Funktionen von x und y anstelle der alten Parameter ein, so ändern sich natürlich die zur neuen Flächendarstellung gehörenden Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung. Diese haben wir vor allen Dingen zu berechnen.

Es ist nun ohne weiteres einzusehen, daß die neuen Fundamentalgrößen erster Ordnung E', F', G' wieder den Bedingungen genügen müssen:

$$E' = G' \quad \text{und} \quad F' = 0$$

da ja auch p und q isotherm sind nach 49). Man erhält für E' den Wert durch die Beziehung:

$$50) \qquad E = E' \{p_x^2 + p_y^2\}$$

Für L', M', N' berechnen wir die diesbezüglichen Werte. Dazu dienen die Tranformationsformeln der binären quadratischen Differentialformen. Es gilt bekanntlich:

$$L = L' p_x^2 + 2 M' p_x q_x + N' q_x^2$$
$$M = L' p_x p_y + M' \{p_x q_y + q_x p_y\} + N' q_x q_y$$
$$N = L' p_y^2 + 2 M' p_y q_y + N' q_y^2$$

Beachtet man nun, daß $L = -N$ ist nach 26) sowie, daß Ableitungen von p und q nach x und y den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen genügen, so folgt aus obigem:

51) $$L' = -N'$$

Dies berücksichtigt führt uns zu den folgenden Formeln:

$$N = -L'(p_x^2 - p_y^2) + 2 M' p_x p_y$$
$$M = M'(p_x^2 - p_y^2) + 2 L' p_x p_y$$

woraus sich L', M', N' berechnen lassen und wir erhalten, wenn wir zugleich die Werte aus 26) einsetzen:

52)
$$M' = \frac{2 v (p_x^2 - p_y^2) + 4 u p_x p_y}{(p_x^2 + p_y^2)^2}$$
$$L' = \frac{2 u (p_y^2 - p_x^2) + 4 v p_x p_y}{(p_x^2 + p_y^2)^2}$$

Die Gleichungen 52) geben uns die Bedingungen, denen p und q genügen müssen um einerseits Krümmungsparameter, anderseits Asmptotenparameter zu sein. Wir brauchen nur das einemal $M' = 0$ zu setzen und das anderemal dies mit $N' = -L'$ zu tun.

Zwischen den zur Fläche 17) gehörenden harmonischen Funktionen u und v und dem Real- und Imaginärteil der analytischen Funktion, die uns die beiden gesuchten ausgezeichneten Kurvensysteme liefern soll, bestehen demnach folgende Gleichungen:

53)
a) für Krümmungslinien: $$\frac{u}{v} = -\frac{p_x^2 - p_y^2}{2 p_x p_y}$$

b) „ Asymptotenlinien: $$\frac{u}{v} = \frac{2 p_x p_y}{p_x^2 - p_y^2}$$

Wir wollen im folgenden nur 53a) betrachten und schreiben dafür:

$$u = \lambda (p_x^2 - p_y^2), \quad v = -2 \lambda p_x p_y$$

Da Zähler und Nenner in 53) rechter Hand ebenfalls Potentialfunktionen einer analytischen Funktion sind, so folgt sofort, daß λ nur eine Konstante sein kann. Unbeschadet der Allgemeinheit können wir für die folgenden Untersuchungen diese Konstante als $+1$ voraussetzen.

Nun bietet es keine Schwierigkeiten mehr, die Gleichungen der Krümmungsparameterlinien für die zu $\mathfrak{F}(s)$ gehörende Minimalfläche zu berechnen. Es sind hierzu zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten aufzulösen und die beiden nachfolgenden Beziehungen zu berücksichtigen:

$$dp = p_x\,dx + p_y\,dy\,, \quad dq = q_x\,dx + q_y\,dy$$

So findet man, wenn man sich auf ein Zeichen der Wurzel festlegt:

54)
$$\int \sqrt{\frac{u \pm \sqrt{u^2+v^2}}{2}}\,dx + \int \sqrt{\frac{-u \pm \sqrt{u^2+v^2}}{2}}\,dy = \text{const.}$$
$$\int \sqrt{\frac{u \pm \sqrt{u^2+v^2}}{2}}\,dy - \int \sqrt{\frac{-u \pm \sqrt{u^2+v^2}}{2}}\,dx = \text{const.}$$

Aus 53) und den Folgerungen daraus gewinnt man durch Zusammenfassung im Komplexen.

$$u + iv = (p_x - i\,p_y)^2 = (p_x + i\,q_x)^2$$

und damit:

$$p_x + i\,q_x = \sqrt{u+iv} = \frac{d}{ds}(p + i\,q)$$

d. h. es gilt:

$$p + i\,q = \int \sqrt{u+iv}\,ds = \int \sqrt{\mathfrak{F}(s)}\,ds$$

und die Gleichungen für die Krümmungslinien der Minimalfläche nehmen die einfache Gestalt an:

55)
$$p = \Re \int \sqrt{\mathfrak{F}(s)}\,ds = \text{const.}$$
$$q = \Im \int \sqrt{\mathfrak{F}(s)}\,ds = \text{const.}$$

Dies sind die Formeln, die Darboux auf anderem Wege hergeleitet hat und zwar unter Zuhilfenahme von Ebenenkoordinaten für die Minimalflächendarstellung. (Vergl. Darboux, théorie des surfaces Ier partie, livre III., pag. 296 etc.)

Unsere Betrachtungen dieses Paragraphen fassen wir im folgenden Satze zusammen:

Satz 6. *Die Krümmungs- und Asymptotenparameterlinien*

$$p = \text{const.} \quad \text{und} \quad q = \text{const.}$$

einer zur analytischen Funktion $\mathfrak{F}(s) = u + iv$ *gehörenden Minimalfläche hangen mit den harmonischen Funktionen* u *und* v *durch die beiden folgenden Gleichungssysteme zusammen:*

$$\begin{aligned} &a) \quad u = k(p_x^2 - p_y^2), \quad v = -k \cdot 2 p_x p_y \\ &b) \quad u = k \cdot 2 p_x p_y, \quad\quad v = k(p_x^2 - p_y^2) \end{aligned}$$

wo k *eine Konstante bedeutet.*

Aus ihnen ergeben sich durch algebraische Auflösung und durch Quadraturen die gewünschten Gleichungen der gesuchten Kurven.

Betrachten wir zum Schlusse noch zwei einfache Beispiele:

Erstens sei an unser schon oft angeführtes Beispiel der Fläche von Enneper erinnert.

Da galt $u = 1$, $v = 0$, so daß die Gleichungen a) und b) des Satzes 6 ergeben; für K das einemal 1, das anderemal $\frac{1}{2}$ gesetzt:

$$\begin{aligned} &a) \quad p_x^2 - p_y^2 = 1; \quad 2 p_x p_y = 0 \\ &b) \quad p_x p_y = 1; \quad \tfrac{1}{2}(p_x^2 - p_y^2) = 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt durch Auflösung nach p_x und p_y und durch Integration:

$$\text{a)} \quad \begin{matrix} \pm x = \text{const.} \\ \pm y = \text{const.} \end{matrix} \qquad \text{b)} \quad \begin{matrix} x + y = \text{const.} \\ x - y = \text{const.} \end{matrix}$$

Zweitens sei $\mathfrak{F}(s) = s^2$, d. h. $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Wählen wir $k = 1$ und beschränken uns auf den Fall a).

Dann gelten also die Gleichungen:

$$p_x^2 - p_y^2 = x^2 - y^2, \quad p_x p_y = -xy$$

Diese werden gelöst durch den Ansatz:

$$p_x = x = q_y \quad \text{und} \quad p_y = -y = -q_x$$

woraus für p und q, abgesehen von Konstanten folgt:

$$p = \int x\,dx - y\,dy = \frac{x^2 - y^2}{2}; \quad q = \int y\,dx + x\,dy = xy$$

$p = \text{const.}$ und $q = \text{const.}$ sind dann die gesuchten Kurvensysteme und wir sehen, daß sie für $\mathfrak{F}(s) = s^2$ mit denjenigen übereinstimmen, die von dieser analytischen Funktion gebildet werden, wenn wir die Kurven $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ in der s-Ebene betrachten.

Zur Aufstellung der fraglichen Kurvensysteme, als Parameterlinien der Krümmungskurven der Fläche, kann man natürlich auch von den Gleichungen 55) ausgehen.

Literaturverzeichnis.

1. Darboux, théorie des surfaces, Ier partie, livre III.
2. Scheffers, Theorie der Flächen, 2. Abschn., § 15.
3. Blaschke, Differentialgeometrie, Bd. I.
4. Schwarz, Mathematische Abhandlungen, Bd. I.
5. Sophus Lie, Mathematische Annalen, Bd. 14, 1879.
6. Weierstraß, Berliner Monatsberichte 1866, pag. 612.
7. Enneper, Zeitschrift f. Math. und Phys., Bd. 9, 1864.
8. Riemann, Gesammelte Werke 1876, pag. 287.
9. Bonnet, Journal de Math. (2) 5, 1860, pag. 245.
10. Weingarten, Journal für Math. 62, 1863, pag. 164.
11. Lilienthal, Journal für Math. 98, 1885, pag. 131.
12. Encyklopädie der Math. Wissenschaften, Bd. III_3, Heft 1.

Lebenslauf.

Ich bin am 15. Februar 1899 in Thun geboren worden; besuchte da Primarschule und Progymnasium und trat nach Absolvierung des obligatorischen Schulunterrichtes ins städtische Gymnasium in Bern ein. Im Herbst 1918 bestand ich an der Realabteilung dieser Anstalt die Reifeprüfung.

Im Sommersemester 1921 immatrikulierte ich mich an der Philosophischen Fakultät der Universität Zürich zum Studium der Mathematik. Im Jahre 1924 trat ich ins Erwerbsleben, wo ich während 4 Jahren tätig war, um mich hierauf an der Universität Bern auf das Doktorexamen vorzubereiten. Hier promovierte ich am 30. Juni 1932 mit der vorstehenden Arbeit und bestand das Examen in den Fächern: Mathematik, Physik und Versicherungslehre.